



Пользоваться языком кое-как – значит мыслить кое-как: неточно, приблизительно, неверно.  
Л.Н. Толстой

## БАЗОВЫЕ ДЛЯ МЕТРОЛОГИИ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

Величина

шифра → число → величина.

Античная метрология – геометрия – основана на аксиомах ЕВДОКСА (408 – 355 гг. до новой эры) и на аксиоме АРХИМЕДА (287 – 212 гг. до новой эры):

- 1) для любых  $a$  и  $b$  имеет место либо  $a = b$ , либо  $a > b$ , либо  $a < b$ ;
- 2) транзитивность отношений «меньше» и «больше» – если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ ;
- 3) для любых  $a$  и  $b$  существует только одно  $c = a + b$ ;
- 4)  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения);
- 5)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (ассоциативность сложения);
- 6)  $a + b > a$  (монотонность сложения);
- 7) для  $a > b$  есть только одно  $c$  такое, что  $b + c = a$  (возможность вычитания);
- 8) для любых  $a$  и натурального  $n$  есть такая  $b$ , что  $n \cdot b = a$  (возможность деления);
- 9) для любых  $a$  и  $b$  существует такое натуральное  $n$ , что  $a < n \cdot b$  или  $(n-1) \cdot a \leq b \leq n \cdot a$ .

Этим аксиомам удовлетворяет множество чисел с рациональным отношением к 1, а различные меры и присвоенных им чисел были изоморфны. Геометрия стала источником математических моделей, позволивших по одним измеряемым переменным, используя свойства моделей, высчитать значения других переменных, т.е. решать измерительные задачи. Теоремы геометрии о свойствах моделей привели к отождествлению измерений и вычислений по данным измерений. Но еще в VI в. до н.э. ПИФАГОР (570 – 490 гг. до н.э.) установил, что результаты вычислений, в отличие от результатов измерений, не всегда выражаются рациональной дробью. Он описал сущность несоизмеримых отрезков, длина которых с любой наперед заданной точностью может быть вычислена. Это вызвало первый в истории математики кризис, а также появление теории иррациональных величин ТАЛЕТТА (417 – 369 гг. до н.э.) и учение ЕВДОКСА о несоизмеримости. Однако строгое решение проблемы требовало понятия действительного числа. Оно было сформулировано только в 1707 г. Исааком Ньютоном в «Универсальной арифметике»: «Число есть не столько совокупность нескольких единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой, однородной с ней и принятой за единицу». В 1768 г. Леонард Эйлер уточнил это понятие в «Алгебре»: «При определении или измерении величин всякого рода устанавливается некоторая известная величина этого же рода, именуемая мерой или единицей и зависящая исключительно от нашего произвола. Затем определяется, в каком отношении находится данная величина к этой мере, что всегда выражается через числа, так что число является не чем иным, как отношением, в котором одна величина находится к другой, принятой за единицу».

**Принцип Ньютона-Эйлера:** Физический размер меры единицы измерения с её номинальным значением не связан, физические размеры мер кратных и дольных единиц устанавливаются калибровкой.

Истинное значение физической величины является условным. Поэтому утверждение о неизвестности истинного значения смысла не имеет.

**МНОЖЕСТВО** – совокупность каких-либо объектов (его элементов) с общими для них свойствами.

**АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА** (структура или модель) – множество с определенными на нем операциями (действиями) и отношениями (связями).

**ИЗОМОРФИЗМ** (связи) – установление соответствия каждого элемента одного множества какому-либо элементу другого множества.

**ГОМОМОРФИЗМ** (отображение, сохраняющее в алгебраических системах заданные операции).

**ОТОБРАЖЕНИЕ** (преобразование, функция) – установление соответствия каждого элемента одного множества какому-либо элементу другого множества.

Несколько величин называются векторами и тензорами: их можно складывать, но отношение неравенства для них теряет смысл. Компоненты векторов и тензоров являются скалярами, для которых справедливы аксиомы множества действительных чисел.

**Множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  – множество чисел со свойствами:**

- 1 единственности; 2–5 порядки; 6–8, 10 сложения (ассоциативности); 9 существования 0;
- 14 существования 1; 11–13, 15–16 умножения (коммутативности); 17 непереносимости.

**Скалярная величина** – подмножество действительных чисел, проявляющееся одним из них – значением, при соответствии свойств этого подмножества свойствам множества действительных чисел с определенной полнотой.

**Неопределенная величина** – величина, значение которой не определено или неизвестно. Ее характеризуют интервалом неопределенности  $[x; x']$ , множеством возможных значений  $\{X\}$  или распределением вероятностей возможных значений.

**Интервальная арифметика** – арифметика величин в виде интервалов.

$$[a; b] + [c; d] = [a + c; b + d], [a; b] - [c; d] = [a - d; b - c]$$

$$[1; 2] + [3; 4] = [4; 6], [1; 2] - [3; 4] = [-3; -2], [1; 2] \cdot [3; 4] = [3; 8], [1; 2] : [3; 4] = [1/4; 1/2]$$

$$[a; b] \cdot [c; d] = [\min(ac, bc, ad, bd), \max(ac, bc, ad, bd)]$$

$$[a; b] : [c; d] = [\min(ac, bc, ad, bd), \max(ac, bc, ad, bd)]$$

**Новая математическая терминология**, появившаяся в РМГ 79–2013 [2а], 3.27 исчисление величин: Набор математических правил и операций, применяемых к величинам, которые не являются порядковыми величинами.

**Присоединение** – В исчислении величин уравнение связи между величинами, предложенное уравнение связи между числовыми значениями, потому что уравнение связи между величинами не зависит от выбора единиц измерения, тогда как уравнение связи между числовыми значениями – зависит.

**3.28 аддитивная величина:** Величина, различные значения которой могут быть суммированы, умножены на числовой коэффициент, разделены друг на друга.

**Пример** – К аддитивным величинам относятся длина, масса и др.

**3.29 неаддитивная величина:** Величина, для которой суммирование ее значений не имеет смысла.

**Пример** – Термодинамическая температура.

**3.30 порядковая величина:** Величина, определенная в соответствии с принятыми на соглашении методом измерений или методикой измерений, для которой может быть установлено, в соответствии с ее размером, общее порядковое соотношение с другими величинами того же рода, но для которой не применимы алгебраические операции над этими величинами.

**Примеры** – 1 Твердость по шкале С Роквелла. 2. Октавовое число для летнего толчка. 3. Сила землетрясения по шкале Рихтера. 4. Субъективный уровень боли в брошенной пакете по шкале от 0 до 5.

**Примечание** – 1. Порядковые величины могут входить только в эмпирические соотношения и не имеют на единицы измерения, ни размерностей величин. Разности и отношения порядковых величин не имеют смысла.

### ВЕРОЯТНОСТЬ

**Задача:** При бросании монеты герб выпадет 10 раз. Какова вероятность его выпадения на 11-й раз?

| Концепция вероятности | Принципы определения вероятности значения $x$ случайной величины $X$                                                                                              |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Аксиоматическая       | принцип априорной равной вероятности на множестве элементарных событий                                                                                            |
| Муавра-Лапласа        | частотный принцип: относительная частота повторения значений $x$ в неограниченно увеличивающейся серии измерений – $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \omega_x/N$ . |
| Частотная             | в неограниченно увеличивающейся серии измерений – $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \omega_x/N$ .                                                                  |
| Пуассона-Митеса       | смешанный принцип правдоподобия: априорная оценка вероятности появления значения $x$ и ее апостериорное уточнение                                                 |
| Субъективная          | принцип априорного максимального правдоподобия.                                                                                                                   |
| Бернулли-Бейеса       | интерпретируемая статистическая модель распределения вероятностей в эксперименте                                                                                  |
| Интерпозиционная      | по критериям максимума вероятности согласия или минимума несовместимости                                                                                          |
| Гаусса-Фишера         | формулы теории интерполяции: при неидентичных характеристиках интерполяции не менее двух известных значений                                                       |

**Примечание:** 1) элементарных событий для «герба» и «орла», потому что  $P = 1/2$ .

2) относительная частота наступления события 10/10, потому что  $P = 1$ ;

3) для  $\beta$ -распределения  $1/(b-a)^{\beta} \cdot (1-p)^{\beta-1}$  согласно теореме Бейеса вероятность повторения события  $x$  раз из  $N$  равна  $M(p) = (a+b)/(a+b+N)$ ; при  $a=b=5$ ,  $M(p) = 15/20 = 0,75$ , при  $a=10$  и  $b=10$ ,  $M(p) = 20/30 = 0,67$ ;

4) модель события и степени ее неадекватности не указаны – задача сформулирована исторически.

Теория вероятностей – алгебраическая теория моделей величин или замкнутостей между ними в виде распределения вероятностей, их композиций и связей. Теория вероятностей дает формулы для решения различных задач определения по заданным вероятностям характеристикам исходных данных характеристик исходных величин или замкнутостей. В силу этого получаемые результаты играют роль моделей.

**Статистическая величина** – величина, описываемая распределением вероятностей, выражающим статистическую устойчивость ее значений в неограниченной серии опытов, сложностей и воспроизводимости.



Примечание - Если случайная величина  $X$  имеет математическое ожидание  $\mu$ , то соответствующая центрированная случайная величина равна  $X - \mu$ .

1.22 дисперсия (случайной величины) - Математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины  $\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2]$ .

1.23 стандартное отклонение (случайной величины) - Положительный квадратный корень из значения дисперсии  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

1.24 коэффициент вариации (случайной величины) - Отношение стандартного отклонения к абсолютному значению математического ожидания случайной величины  $\sqrt{V(X)} / E(X)$ .

Стандартизованная стохастическая величина - Стохастическая величина, у распределения которой параметр положения  $\theta_1 = 0$ , а параметр рассеяния  $\theta_2 = 1$ .

1.25 стандартизованная случайная величина - Случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю, а стандартное отклонение - единице.

Примечание - 1 Если случайная величина  $X$  имеет математическое ожидание  $\mu$  и стандартное отклонение  $\sigma$ , то соответствующая стандартизованная случайная величина равна  $(X - \mu) / \sigma$ . Распределение стандартизованной случайной величины называется стандартным распределением.

2 Появление стандартизованной случайной величины является частным случаем приведенной случайной величины, определяемой относительно центрального значения и параметра масштаба, отличных от математического ожидания и стандартного отклонения.

1.27 момент\* порядка  $q$  относительно  $a$  - Математическое ожидание величины  $(X - a)^q$ .

1.28 центральный момент порядка  $q$  - Математическое ожидание центрированной случайной величины для одномерного распределения  $E[(X - \mu)^q]$ .

Примечание - Центральный момент второго порядка - дисперсия случайной величины  $X$ .

1.30 совместный момент\* порядков  $q$  и  $s$  относительно точки  $(a, b)$  - Математическое ожидание произведения случайной величины  $(X - a)$  в степени  $q$  и случайной величины  $(Y - b)$  в степени  $s$  для двумерного распределения:  $E[(X - a)^q (Y - b)^s]$ .

1.32 ковариация; корреляционный момент

Совместный центральный момент порядков 1 и 1:  $E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$ .

1.33 коэффициент корреляции - Отношение ковариации двух случайных величин к произведению их стандартных отклонений:

$$\rho = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

Примечания - 1 Эта величина всегда будет принимать значения от минус 1 до плюс 1, включая крайние значения. 2 Если две случайные величины независимы, коэффициент корреляции между ними равен нулю только в случае двумерного нормального распределения.

Свойство плотности распределения вероятностей: площадь под  $f_X(x)$  при  $a \leq x \leq b$  равна вероятности нахождения величины  $X$  в интервале  $[a, b]$ :  $P\{a \leq X \leq b\} \leq 1$ .

Характеристики законов распределений стохастических величин

- вид «» - структура аналитического выражения («» = L, G, K, R и т.д.);

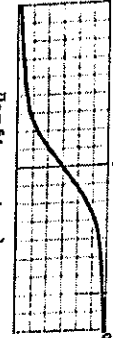
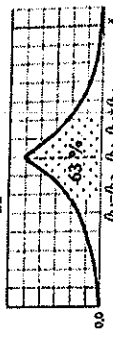
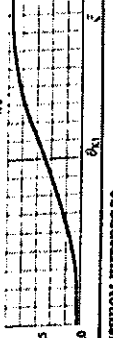
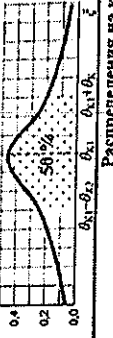
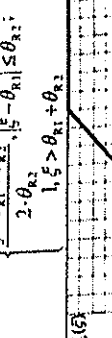
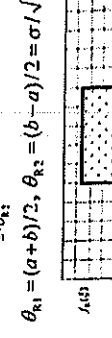
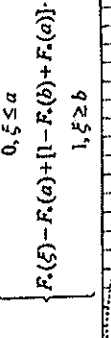
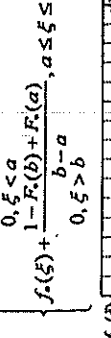
- параметры - положения  $\theta_1$ , рассеяния  $\theta_2$ , асимметрии  $\theta_3$ , эксцесса  $\theta_4$ .

Параметр положения (смещения) характеризует центр распределения на числовой оси, для симметричного распределения совпадает с медианой и математическим ожиданием.

Параметр рассеяния (масштаба) характеризует рассеяние распределения относительно параметра положения: для распределения Гаусса - стандартное отклонение или корень из дисперсии, для распределения Лапласа - математическое ожидание абсолютного отклонения от медианы.

Параметр асимметрии для симметричных плотностей распределений вероятностей равен нулю. Параметр эксцесса характеризует остроту пика плотности распределений. Относительно распределения Гаусса у распределения Лапласа положительный эксцесс, а у распределения Коши - отрицательный.

# Типовые законы распределения вероятностей

| «»    | Плотность распределения $f(x)$                                                                                                                                                                                                                              | Функция распределения $F(x)$                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| * = G | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ <p>где <math>\mu = \theta_1, \sigma = \theta_2</math>.</p>                                                  | <p>Приближение распределения Гробицкая:</p> $\Phi(z) \approx \frac{1}{1 + e^{-1.975z - 0.0001z^2}} \pm 0.00014,$ <p>где <math>z = (x - \theta_1) / \theta_2</math>.</p>                                 |
| * = L | $\frac{1}{2\theta_1} e^{-\frac{ x-\theta_1 }{\theta_1}}$                                                                                                                   | $\begin{cases} 0.5 \cdot e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x \leq \theta_1; \\ 0.5 \cdot e^{-\frac{\theta_1-x}{\theta_2}}, & x > \theta_1. \end{cases}$                                               |
| * = K | $\frac{1}{\pi \cdot \theta_1 \cdot \theta_2} \frac{1 + (\frac{x-\theta_1}{\theta_2})^2}{1 + (\frac{x-\theta_1}{\theta_2})^2 + \theta_1^2 / \theta_2^2}$                    | $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$                                                                                                                                      |
| * = R | $\frac{1}{2 \cdot \theta_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x - \theta_1}{\theta_2})^2}}$ <p><math>\theta_1 = (a+b)/2, \theta_2 = (b-a)/2 = \sigma / \sqrt{3}</math></p>  | <p>Распределения на конечном интервале</p> $\begin{cases} \frac{x - \theta_1 + \theta_2}{2 \cdot \theta_2}, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2; \\ 0, & x < \theta_1; \\ 1, & x > \theta_2. \end{cases}$  |
| [.]   | $\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x - \theta_1}{\theta_2})^2}$ <p><math>\theta_1 = (a+b)/2, \theta_2 = (b-a)/2</math></p>                                         | $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x - \theta_1}{\theta_2}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a; \\ 1, & x > b. \end{cases}$                                                 |

**Распределения, функционально связанные с распределением Гаусса**  
 1.39 распределение  $\chi^2$  — распределение вероятностей независимой случайной величины, принимающей значения от 0 до  $\infty$ , плотность распределения вероятностей которой

$$f(x^2; \nu) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} e^{-x^2/2} x^{\nu-2}$$

где  $x^2 \geq 0$  при значении параметра  $\nu = 1, 2, \dots$ ;  $\Gamma$  — гамма-функция.

**Примечание** — Сумма квадратов  $\nu$  независимых стандартных нормальных случайных величин образует случайную величину  $\chi^2$  с параметром  $\nu$ ;  $\nu$  называют степенью свободы случайной величины  $\chi^2$ .

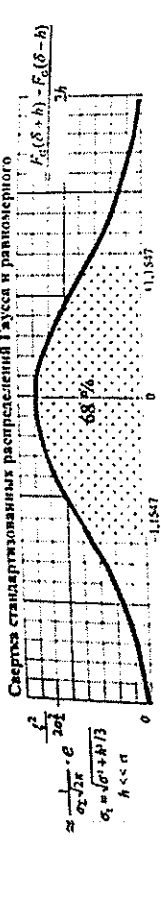
**1.40 t-распределение; распределение Стьюдента** — распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятностей которой  $f(t; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\nu\pi}} (1 + \frac{t^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}$ , где  $-\infty < t < \infty$  с параметром  $\nu = m - 1$ ;  $\Gamma(m) = (m-1)!$  — гамма-функция (при целом  $m$ ).

**Примечание** — Отношение двух независимых случайных величин, числитель которой — стандартная нормальная случайная величина, а знаменатель — положительное значение квадратного корня из частного от деления случайной величины  $\chi^2$  на ее число степеней свободы  $\nu$  — это распределение Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы.

**Композиция сумм**  $\Delta = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$  (свертка) — семейство распределений P. Levy:

$$F(\delta - \delta_0) - F(\delta - \delta_1) \text{ при } \delta_1 \leq \delta \leq \delta_0 \text{ — параметр неопределенности } \psi_\delta.$$

при  $-\delta_0 \leq \delta \leq \delta_0$  — параметр неопределенности.



**Центральная предельная теорема:** Пусть случайная величина  $x$  имеет среднее значение  $m$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Если  $\sigma^2$  конечно, то при стремлении объема выборки  $n$  к бесконечности распределение выборочного среднего  $\bar{x}$  будет стремиться к нормальному распределению со средним  $m$  и дисперсией  $\sigma^2/n$ .

### СТАТИСТИКА

Предметом математической статистики в метрологии являются статистические методы решения измерительных задач. Математическая статистика содержит разделы теоретической и прикладной статистики. Теоретическая статистика, исходя из абстрактного представления совокупностей данных измерений, имеющих статистический разброс (рассеяние), в виде статистических рядов, рассматривает логику решения статистических измерительных задач. Эта логика включает:

- анализ условий применимости статистических методов;
- выбор критериев и правил проверки гипотез о вероятностных характеристиках используемых в измерительных задачах моделей (идентификация) вероятностных характеристик математических моделей зависимости между физическими и расчетными величинами;
- выбор критериев и правил определения (идентификация) вероятностных характеристик математических моделей зависимости между физическими и расчетными величинами;
- выбор формы представления и критериев доверия к результатам измерительных задач.

Прикладная статистика использует результаты теоретической статистики для разработки алгоритмов решения конкретных измерительных задач.

### Основные термины математической статистики

**Генеральная совокупность (значений величин):** совокупность всех возможных значений измеряемой величины, которые могли бы быть получены при данном комплексе значений влияющих величин.

**Примечания** — Генеральная совокупность может быть конечной и реально существующей при большом числе объектов измерений, бесконечной и гипотетической.

**Статистический ряд:** ряд значений величин в порядке их получения:  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_N$ .

**Выборка (из генеральной совокупности):** статистически ряд значений величин при фиксированном комплексе значений влияющих величин.

**Примечания** — 1. Выражение выборки из бесконечной генеральной совокупности с функцией распределения  $F(x)$  означает, как правило, совокупность независимых случайных величин, имеющих общую функцию распределения  $F(x)$ . 2. Выборки по способу формирования разделяют на случайные и случайные, репрезентативные (представительные) и целенаправленные (условные).

**Статистическая однородность:** свойство выборки, отклонения элементов которой от некоторого параметра положения имеют общую функцию распределения  $F(x)$ .

**2.45 статистика:** функция от выборочных значений.

**Примечание** — Статистика как функция от выборочных значений — случайная величина, которая может принимать различные значения от выборки к выборке. Знание статистики, получаемое при использовании наблюдаемых значений как их функции, может быть использовано при проверке статистических гипотез или как оценка параметра совокупности, например, (математическое ожидание) среднеарифметическое или стандартного отклонения.

**2.47 тренд:** тенденция к возрастанию или убыванию наблюдаемых значений величины во времени после усреднения и исключения циклических эффектов.

**2.57 двусторонний доверительный интервал:** Если  $T_1$  и  $T_2$  — две функции от наблюдаемых значений таких, что для оценки параметра распределения совокупности  $\theta$  вероятность  $Pr\{T_1 \leq \theta \leq T_2\}$  равна  $(1 - \alpha)$ , где  $(1 - \alpha)$  — константа, положительная и меньше 1, то интервал между  $T_1$  и  $T_2$  — это двусторонний доверительный интервал для  $\theta$  при доверительной вероятности  $(1 - \alpha)$ .

**2.60 доверительная граница:** Каждая из границ  $T_1$ , верхняя  $T_2$  для двустороннего доверительного интервала или граница  $T$  для одностороннего интервала.

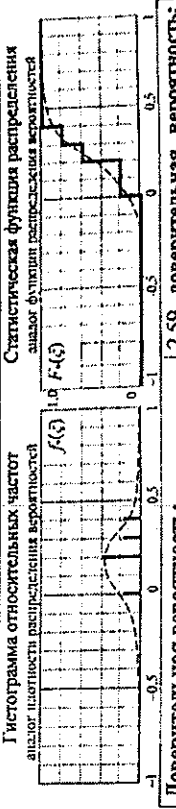
**Вариационный ряд** — Упорядоченный статистический ряд:

$$\hat{x}_{(1)} \leq \hat{x}_{(2)} \leq \dots \leq \hat{x}_{(n)}, \text{ где } \hat{x}_{(i)} - i\text{-я порядковая статистика.}$$

**Ранг** — общий порядковый номер  $[r]$  равных значений вариационного ряда.

**Ряд ранговых значений** — вариационный ряд различных значений и частот их повторения:  $\hat{x}_{(1)} < \hat{x}_{(2)} < \dots < \hat{x}_{(n)}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , где  $R$  — число рангов.

**Статистическая функция распределения** — функция переменной  $x$  накопленных относительных частот с параметрами ряда ранговых значений:

$$F_{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i, \text{ где } 1(x - \hat{x}_{(i)}) = \begin{cases} 0, & x < \hat{x}_{(i)} \\ 1, & x \geq \hat{x}_{(i)} \end{cases} \text{ — функция Хемпсайда.}$$


**Доверительная вероятность:** Вероятность накрытия оценкой  $\{\theta; \theta'\}$  параметра  $\theta$  распределения величины  $X$  или вероятности накрытия оценкой  $[x; x']$  доли  $\gamma$  распределения величины  $X$ .

**Уровень доверия** —  $1 - \alpha$ , где  $\alpha = P(\theta < \theta') = P(x < x')$ .

**2.59 доверительная вероятность; уровень доверия:** Величина  $(1 - \alpha)$  — вероятность, связанная с доверительным интервалом или со статистически накрывающим (толерантным) интервалом.

**Метод доверительного оценивания** — метод построения такого множества  $C(x)$ , которое содержит неизвестный параметр  $\theta$  семейства плотностей  $f(x|\theta)$  или его долю  $\gamma$  с вероятностью накрытия  $P\{f(x|\theta) \in C(x)\} = \inf_{\theta \in \Theta} \int_{C(x)} f(x|\theta) dx$ .

**Примечание** — Если  $P_C$  не зависит от  $\theta$  или  $\gamma$ , то вероятность накрытия называют доверительной, иначе — уровнем доверия. Проверка непараметрических гипотез реализуется по максимуму вероятности согласно или по минимуму потребности неадекватности [3] и по максимуму достигнутого уровня значимости [13].



2.61 **толерантный интервал** – Интервал, для которого можно утверждать с данным уровнем доверия (доверительной вероятностью), что он содержит, по крайней мере, заданную долю определенной (генеральной) совокупности.

2.63 **критерий согласия распределения** – Мера соответствия между наблюдаемым распределением и теоретическим распределением, выбранным априори либо подобранным по результатам наблюдений.

2.65 **статистический критерий** – Статистический метод принятия решений о том, стоит ли отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной или нет.

Примечания – 1 Решение о нулевой гипотезе принимают исходя из значений соответствующих статистик, лежащих в основе статистических критериев или рассуждая по результатам наблюдений. Так как статистики – случайные величины, существует некоторый риск принятия ошибочного решения (2.75 и 2.77). 2 Критерий априори предполагает, что проверяют некоторые предположения, например, предположение о независимости наблюдений, предположение о нормальности и т.д.

2.66 **нулевая гипотеза** и **альтернативная гипотеза** – Утверждения относительно одного или нескольких параметров или о распределении, которые проверяют с помощью статистического критерия.

Примечания – 1 Нулевая гипотеза ( $H_0$ ) – предположение, обычно сложное, относят к утверждению, подлежащему проверке, в то время как альтернативную гипотезу ( $H_1$ ) относят к утверждению, которое будет принято, если нулевую гипотезу отвергают. 2 Проверка гипотезы о том, что математическое ожидание  $\mu$  случайной величины  $X$  в совокупности не меньше, чем заданное значение  $\mu_0$ :  $H_0(\mu \geq \mu_0)$ . 3 Проверка гипотезы о том, что доли несоответствующих деталей в двух партиях  $p_1$  и  $p_2$  одинаковы (несоответствую):  $H_0(p_1 = p_2)$  и  $H_1(p_1 \neq p_2)$ . 4 Проверка гипотезы о том, что случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с известными параметрами. Альтернативная гипотеза – распределение не нормально.

2.67 **простая гипотеза** – Гипотеза, которая полностью задает распределение совокупности.

2.68 **сложная гипотеза** – Гипотеза, которая не полностью задает распределение совокупности.

Примечания – 1 Это обычно гипотеза, которая включает в себя бесконечную систему простых гипотез. 2 В предположении нормального распределения гипотеза  $\mu = \mu_0$  будет простой, если стандартное отклонение совокупности известно, но она будет сложной, если оно неизвестно. 3 Все гипотезы из примечаний, приведенных в 2.66, сложные.

2.69 **свободный от распределения критерий** – Критерий, в котором функция распределения статистики, лежащей в основе критерия, не зависит от функции распределения наблюдений.

2.70 **уровень значимости (критерия)** – Заданное значение верхнего предела вероятности ошибки 1-го рода.

Примечание – Уровень значимости обычно обозначают  $\alpha$ .

2.71 **критическая область** – Множество возможных значений статистики, лежащей в основе критерия, для которого отвергают нулевую гипотезу.

Примечания – 1 Критическая область определяют таким образом, что если нулевая гипотеза верна, вероятность ее отбрасывания равна заданному значению  $\alpha$ , обычно малому, например, 5% или 1%.

2 Классический способ проверки нулевой гипотезы, относящийся к математическому ожиданию нормального распределения с известным стандартным отклонением  $\sigma$ ,  $H_0(\mu \geq \mu_0)$  против альтернативы  $H_1(\mu < \mu_0)$ , – использование статистики  $\bar{x}$  выборочного среднего арифметического. Критическая область – это множество значений статистики, меньших чем  $A = \mu_0 - \mu_{\alpha} \cdot \sigma / \sqrt{n}$ , где  $n$  – объем выборки;  $\mu_{1-\alpha}$  – это квантиль уровня  $(1-\alpha)$  стандартизованной нормальной случайной величины. Если рассчитанное значение  $\bar{x}$  меньше  $A$ , гипотезу  $H_0$  отвергают. В противном случае –  $H_0$  не отвергают (принимают).

2.75 **ошибка 1-го рода** – Ошибка, состоящая в отбрасывании нулевой гипотезы, поскольку статистика принимает значение, принадлежащее критической области, в то время как эта нулевая гипотеза верна.

2.76 **вероятность ошибки 1-го рода** – Вероятность допустить ошибку 1-го рода.

Примечания – 1 Она всегда меньше уровня значимости критерия или равна ему. 2 В примечании 2 к 2.71 ошибка первого рода состоит в отбрасывании  $H_0(\mu < \mu_0)$ , потому что  $\bar{x}$  меньше  $A$ , в то время как на самом деле  $\mu$  равно или превышает  $\mu_0$ . Вероятность такой ошибки равна  $\alpha$  при  $\mu = \mu_0$  и уменьшается с увеличением  $\mu$ .

2.77 **ошибка 2-го рода** – Ошибка принять нулевую гипотезу, поскольку статистика принимает значение, не принадлежащее критической области, в то время как нулевая гипотеза не верна.

2.78 **вероятность ошибки 2-го рода** – Вероятность допустить ошибку 2-го рода.

Примечание – Вероятность ошибки 2-го рода, обычно обозначают  $\beta$ , зависит от реальной ситуации и может быть вычислена лишь в том случае, если альтернативная гипотеза задана явно.

2.79 **мощность критерия** – Вероятность недопущения ошибки 2-го рода.

Примечания – 1 Это вероятность отбрасывания нулевой гипотезы, когда она не верна. Ее обычно обозначают  $(1-\beta)$ . 2 В примечании 2 к 2.71 ошибка второго рода состоит в принятии гипотезы  $H_0(\mu \geq \mu_0)$ , поскольку  $\bar{x}$  превышает  $A$ , в то время как на самом деле  $\mu$  меньше  $\mu_0$ . Вероятность  $\beta$  такой ошибки зависит от фактического значения  $\mu$ : чем ближе  $\mu$  к  $\mu_0$ , тем ближе мощность к 1. 3 В примечании 4 к 2.66 проверка нулевой гипотезы  $H_0$  (нормально распределенная совокупность) против альтернативы  $H_1$  (совокупность с ненормальным распределением) невозможно выразить  $\beta$  как функцию от альтернативной гипотезы, поскольку она не определена.

**Типы статистических оценок:** точечные, интервальные, вероятностные. 1. Точечные статистические оценки – оценки вероятностных характеристик статистического ряда как числа или как функции  $F(\xi)$  с числовыми параметрами.

**Точечные оценки параметров типовых распределений вероятностей**

| «» | Метод                                         | Оценки параметра положения $\theta$            | СКО оценки $s(\hat{\theta}_1)$                                            | Оценки параметра рассеяния $\theta_2$                                     |
|----|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| G  | ММП, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ | среднее арифметическое $\bar{x}$               | $\frac{\hat{\theta}_1}{\sqrt{n}}$                                         | $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ – СКО                 |
| L  | ММ                                            | $\hat{\theta}_1$ – выборочная медиана          | $\frac{\hat{\theta}_1}{\sqrt{n}}$                                         | $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}_1)^2}$ – СКО          |
| R  | ММП                                           | $\hat{\theta}_1 = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}$ | $\frac{\sqrt{n-1} \cdot \hat{\theta}_1}{\sqrt{n}}$                        | $\frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}$                                             |
| K  | МК                                            | $\hat{\theta}_1$ – выборочная медиана          | $\frac{\pi \cdot \hat{\theta}_1}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ | $\frac{\pi \cdot \hat{\theta}_1}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ |

2. Интервальные статистические оценки – построенные методом доверительного оценивания интервалы или области, накрывающие с заданной доверительной вероятностью или заданным уровнем доверия в окрестности точечной оценки неизвестные оцениваемые параметры или функции.

2.1. **Доверительный интервал** – случайный интервал  $[\theta^*, \theta^*]$  возможных значений параметра  $\theta$  функции  $F(\theta, x)$  при доверительной вероятности  $P_\theta\{\theta^* < \theta < \theta^*\} = \rho$  или при уровне доверия  $\rho_\theta = \min P_\theta\{\theta^* < \theta < \theta^*\} = \rho(\theta)$  для выборки данных.

Доверительные интервалы оценок параметров распределения Гаусса при доверительной вероятности  $P$ :  $\theta_1 = \bar{x} \pm t_{\alpha/2} s(\hat{\theta}_1)$ ,  $\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  –  $\hat{\theta}_2 < \theta_2 < \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  –  $\hat{\theta}_2 = \theta_2$ , где  $t_{\alpha/2}$  – квантиль распределения Стьюдента и  $\chi^2$  уровня  $\alpha = (1-\rho)/2$  с  $v = n-1$  степенями свободы.

2.2. **Толерантный интервал** (tolerance interval) – случайный интервал значений переменной  $x$   $[x^*, x^*]$ , построенный по независимым одинаково распределенным случайным величинам с неизвестной функцией распределения  $F(x)$  и содержащий не менее доли  $\rho$  этого распределения с доверительной вероятностью  $P_\chi\{x^* < x < x^*\} = P$  для выборки данных.

2.3. Предельный интервал — интервал значений переменной  $\zeta$ , полученных по случайной выборке объема  $N$  из генеральной совокупности, для которого с уровнем доверия  $R$  можно утверждать, что не менее чем заданная доля  $\gamma$  элементов  $\zeta$  в будущей случайной выборке из этой совокупности попадет в этот интервал.

2.4. Зона толерантности — область для случайной функции  $F(\theta, x)$  с границами  $F^*(x)$  и  $F^*(x)$  таковы, что при доверии  $R$  распределение возможных значений  $F(\theta, x)$  с вероятностью  $\gamma$  не выйдет за пределы этой области.

2.5. Доверительная зона характеристики толерантности  $\theta(x)$  случайной функции  $F(x)$  — область с границами  $\theta^*(x)$  и  $\theta^*(x)$ , что при доверии  $R$  распределение возможных значений  $\theta(x)$  с вероятностью  $\gamma$  не выйдет за пределы этой области.

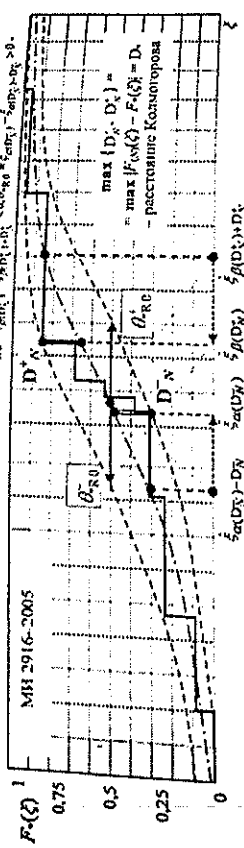
2.6. Контурная оценка — область вокруг статистической функции распределения  $F(x)$  точек данных или функции смеси распределений, притянутых к равномерному случаю, характеризующая погрешности неадекватности принятой функции распределения вероятностей для всей совокупности данных.

Границы этой области образуют смещенная влево и вправо функция распределения вероятностей так, чтобы ограничить этим контуром долю статистических функций распределения, соответствующих заданной вероятности.

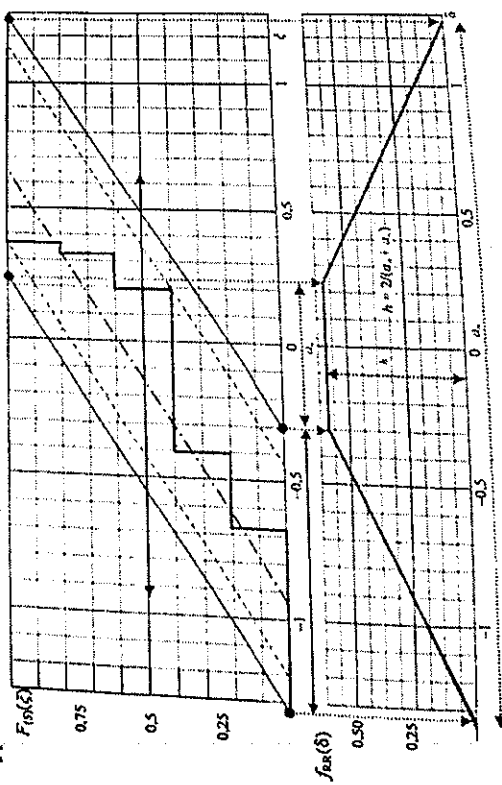
КОНТУРНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ



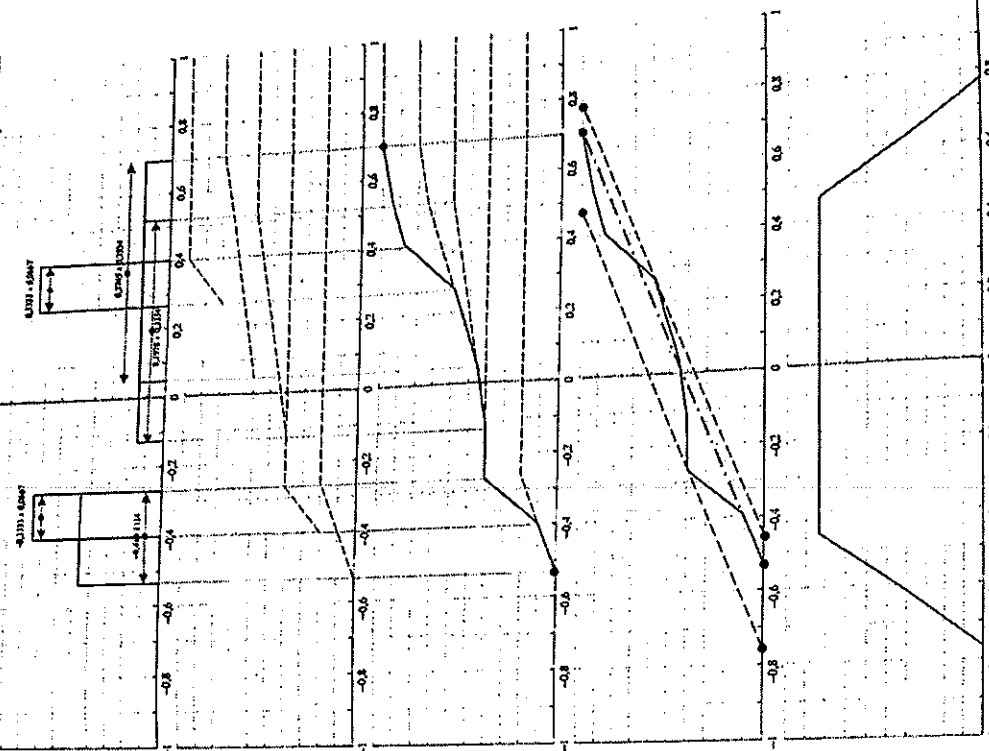
Контур погрешности неадекватности функции распределения вероятностей статистической функции распределения дают статистики Смирнова  $D_N$  и  $D_N^*$  — крайние члены вариационного ряда отклонений статистической функции распределения данных от функции распределения вероятностей:  $D_N = \max_{1 \leq k \leq N} |F_k(x) - F(x)|$ ,  $D_N^* = \max_{1 \leq k \leq N} |F_k(x) - F(x)|$ .



Контурная оценка на основе равномерных распределений при построении композиции



Контурная оценка на основе функции распределения смеси равномерных распределений



Контурные оценки погрешности неадекватности для принятого вида распределения вероятностей позволяют не рассматривать альтернативные гипотезы, соответствующие наихудшему случаю и стимулируют поиск лучшего варианта.

Функция распределения смеси равномерных распределений является непараметрической оценкой, поскольку статистическая функция распределения, которую называют эмпирической функцией распределения вероятностей. Однако ее использование требует проверки плана измерений на репрезентативность.

3. Вероятностная оценка – свертка оценки распределения вероятностей для выборки данных с равномерным распределением, приписанным сумме погрешностей этих данных:

$$f_{\Sigma}(x) = \frac{F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n; x - \delta_{\Sigma}) - F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n; x - \delta_{\Sigma} - \delta_{\Sigma})}{\delta_{\Sigma} - \delta_{\Sigma}}$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_{\Sigma}$  – соответственно оценка параметра рассеяния выборки данных,  $(\delta_{\Sigma}, \delta_{\Sigma})$  – интервал неопределенности для суммы погрешностей данных.

Примечание: доверительные границы оценки параметров положения и рассеяния соответствуют принятой доверительной вероятности для т.н. «выходящего» случая. Задача распределения – вероятностная оценка статистического распределения при объеме выборки  $M$ , позволяющем использовать интервалы оценок параметров распределения и погрешностью недостаточности функции распределения.

#### Р 501.037–2002 Прикладная статистика. Правила проверки согласия

опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии.

2.3.1 Потеря критерия свойства «свободы от распределения»  
При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\chi^2$  Мисса теряют свойство «свободы от распределения». В этом случае распределения статистик этих критериев будут зависеть от закона, которому подчинена наблюдаемая выборка.

2.3.3 Факторы, влияющие на распределение статистик критериев при проверке сложных гипотез  
Распределение статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез зависит от характера этой сложной гипотезы. На закон распределения статистики  $G(SH_0)$  влияют следующие факторы, определяющие сложность гипотезы:

- вид наблюдаемого закона распределения  $F(x, \theta)$ , соответствующего истинной гипотезе  $H_0$ ;
- тип оцениваемого параметра и число оцениваемых параметров;
- в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
- используемый метод оценивания параметров.

2.3.4 ...по выборке вычисляют оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров... в результате максимизация по  $\theta$  функции правдоподобия  $L(\theta)$ ... или ее логарифма  $\ln L(\theta)$ ... как решение системы уравнений правдоподобия вида

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}...$$

При вычислении МД-оценок минимизируется соответствующее расстояние между эмпирическим и теоретическим распределениями.

#### 2.3.9 Выводы

...Некорректно использование оценок по методу моментов (за исключением тех ситуаций, когда оценки по методу моментов совпадают с ОМП), использование различных оценок по наблюдениям, сгруппированным в интервалы. Некорректно вычисление значений статистик непараметрических критериев согласия по группированным наблюдениям.

Некорректное применение статистических методов может привести к неверным заключениям. Все (возможно, и не высказанные явно) предположения, относящиеся к теоретическому распределению, должны быть проверены. Никогда не следует применять одну и ту же выборку для оценки и для проверки. Заметим, наконец, что статистические критерии не могут доказать ни одной гипотезы: они могут лишь указать на «отсутствие опровержения».

Корн Г. Г. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1968 с. 57.

Таблицы 4.8. Критерии исключения резко выделяющихся наблюдений  
Таблицы предназначены для статистического выявления грубых ошибок, возникающих в результате случайного процесса, исправленного чтения показаний измерительного прибора и т.п. В этих условиях наиболее целесообразны способ выявления и устранения грубых ошибок – непосредственный анализ измерений, тщательная проверка неизменности условий всех экспериментов, запись результатов как две руки и т.д. Статистические методы анализа грубых ошибок следует применять лишь в сомнительных случаях, когда дополнительная информация о качестве измерений либо не полная, либо не надежна.

Богачев Д.Н., Селезнев Н.В. Таблицы математической статистики. 3-е изд. М.: Наука. 1983. С. 58.  
Очень часто доверительные потребности потребностей будут бы точно известны. Такой прием является некорректным, что вид закона распределения потребностей будет бы точно известен. Реальные законы распределения вне зависимости от того, допускается он сознательно или неосознанно. *П.В. Новичих*

Прямая проверка на недостаточность в схеме перекрестного наблюдения позволяет избежать в условиях априорной неопределенности некорректностей проверки непараметрических гипотез как сложных гипотез.

Считай то, что считаемо, измерь то, что измеряемо, а то, что не измеряемо, делай измеряемым.

Г. Галилей

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ МЕТРОЛОГИИ

### ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Теория измерений оперирует отдельными физическими величинами.

3.2.41 Физическая величина измерима – математическая модель количественного проявления свойства физических объектов, общего для них в качественном отношении, в виде скалярной именованной размерности величины [4].

Модель физической величины: множество возможных значений или функция других физических величин. Модель может быть представлена статистическим или вероятностным распределением. Значение величины:

по способу установления – номинальное, измеренное, расчетное;

по метрологическому статусу – истинное, действительное, аттестованное, приписанное, экспертное.

Мера физической величины – метрическое средство, воспроизводящее или хранящее количественное проявление свойства физических объектов, для которого

принято номинальное значение отношения единичной физической величины.

Шкала (измерений) физической величины – первая система мер физической величины и их номинальных значений, для которой с определенной точностью установлено соотношение свойством множества действительных чисел.

Спецификация физической величины определяет порядок построения первичной шкалы измерений как системы мер, структуру и содержание поверочной схемы и нормы точности измерений в виде доверительных границ погрешностей с соответствующими доверительными вероятностями.

### Классификация шкал измерений

| Для измерения нет<br>не выполняемо условие порядка | Условие        |                              | Матрица         |                               |
|----------------------------------------------------|----------------|------------------------------|-----------------|-------------------------------|
|                                                    | шкала мерности | шкала интервалов (разностей) | шкала отношений | шкала относительных отношений |
| Число делений                                      | +              | +                            | +               | +                             |
| Единичности                                        | +              | +                            | +               | +                             |
| Опознавательности                                  | +              | +                            | +               | +                             |
| Порядка                                            | +              | +                            | +               | +                             |
| Наличия меры «1»                                   | +              | +                            | +               | +                             |
| Заболотности «0»                                   | +              | +                            | +               | +                             |
| Аддитивности                                       | +              | +                            | +               | +                             |

### Основные термины РМГ 29-2013

3.1 величина: свойство материального объекта или явления, общее в качественном отношении для многих объектов или явлений, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Примечание – Определение, данное в РМГ, включает также способ количественного выражения размера величины как числа и основы для сравнения. В качестве основы для сравнения может выступать единица измерения, методика измерения, стандартный образец или их комбинация.

3.2 размер величины: количественная определенность величины, присущая конкретному материальному объекту или явлению.

3.3 род (величины): качественная определенность величины.

3.4 значение величины: выражение размера величины в виде некоторого числа принятых единиц, или чисел, баллов по соответствующей шкале измерений.

Примечание – В РМГ значение величины определено как число и основа для сравнения, совместно выражающие размер величины. В зависимости от основы для сравнения значение величины может быть выражено: числом и единицей измерения, числом и указанием методики измерения, числом и указанием стандартного образца.



**3.6 система величин:** Согласованная совокупность величин и уравнений связи между ними, образованная в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины условно принимают за независимые, а другие определяют как функции независимых величин.

**Примечания** – 1 Порядковые величины, такие как твердость, измеряемая по шкале С Роквелла, обычно не рассматриваются как относящиеся к системе величин, так как они связаны с другими величинами только через эмпирические соотношения. 2 В названии системы величин применяются символы величин, принятые за основные. Так, система величин механики, в которой в качестве основных приняты длина  $L$ , масса  $M$  и время  $T$ , должна называться системой LMT. Система основных величин, соответствующая Международной системе единиц (СИ), должна обозначаться символами LMTGNI, обозначающими соответственно символы основных величин – длины  $L$ , массы  $M$ , времени  $T$ , силы электрического тока  $I$ , температуры  $\theta$ , количества вещества  $N$  и силы света  $J$ . 3.7 **уравнение связи (между величинами):** математическое соотношение между величинами в данной системе величин, основанное на законах природы и не зависящее от единиц измерения.

**3.11 размерности (величин):** Выражение в форме степенного одночлена, составленного из произведений символов основных величин в различных степенях и отражающее связь данной величины с величинами, принятыми в данной системе величин за основные с коэффициентом пропорциональности, равным 1.

**Примечания** – 1 Степени символов основных величин, входящих в одночлен, в зависимости от связи рассматриваемой величины с основными, могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными. Понятие размерности распространяется и на основные величины. Размерность основной величины в отношении самой себя равна единице, т.е. формула размерности основной величины совпадает с ее символом. 2 Символы, представляющие размерности основных величин в Международной системе величин, приведены в таблице: Таким образом, размерность величины  $Q$  обозначается как  $\dim Q = L^a M^b T^c I^d N^e J^f$ , где показатели степеней, называемые показателями размерности, положительные, отрицательные или равные нулю.

**3.14 единица (измерения) (величин):** величина фиксированного размера, которой присвоено числовое значение, равное 1, определяемая и принимаемая по соглашению для количественного выражения однородных с ней величин.

**3.31 шкала (значений) величин:** шкала измерений: упорядоченная совокупность значений величин, служащая исходной основой для измерений данной величины.

**3.32 шкала (значений) порядковой величины:** шкала (значений) для порядковых величин.

**Примечание** – шкала (значений) порядковой величины может устанавливаться путем измерений в соответствии с методикой измерений.

**[44] 2.1.1 шкала (измерений):** Отображение множества различных проявлений количественного или качественного свойства на принятое по соглашению упорядоченное множество чисел или другую систему логически связанных знаков (обозначений). **Примечания** – 1 Понятие «шкала измерений» не следует отождествлять с отсчетным устройством (шкалой) средства измерений. 2 Различают пять основных типов шкал: наименований, порядки, разностей (интервалов), отношений и абсолютные. 3 Примерами систем знаков, образующих шкалы измерений, являются множество баллов оценки свойств объектов, множество обозначений (названий) цвета, множество названий состояния объекта, совокупность классификационных символов или понятий, множество точек в модельной системе координат. 4 Шкалы разностей и отношений объединяют термином «метрические шкалы». 5 Различают одномерные и многомерные шкалы измерений.

**[44] 2.2.1 шкала наименований:** Шкала измерений качественного свойства, характеризующаяся только соотношениями эквивалентности или отличиями проявлений этого свойства.

**Примечания** – 1 Множество проявлений (реализаций) качественного свойства может быть упорядочено по признаку близости (сходства) качественных реализаций и (или) по признаку количественных различий в некоторых подмножествах проявлений свойства. Например, шкалы измерения цвета опираются на трансформацию модели цветового пространства, упорядоченную по цветовым различиям (качественным признакам) и яркости (количественным признакам). 2 Отличительные признаки шкал наименований: неметричность в их построении, единичные измерения, размерности, допустимость только комбинированных или комбинированных преобразований устанавливаемых рядом «классов эквивалентности».

**[44] 2.4.4 измерение:** Сравнение конкретного проявления измеряемого свойства (измеряемой величины) со шкалой (частью шкалы) измерений этого свойства (величины) в целях получения результата измерения (оценки свойства или значения величины).

**3.34 качественное свойство:** назывательное свойство; иерархическое свойство: Свойство материального объекта или явления, которое не имеет размера.

**Примеры** – 1 Пол человека. 2 Цвет образца краски. 3 Цвет капиллярной пробы в химии. 4 Двухбуквенный код страны по ISO. 5 Последовательность аминокислот в полипептиде.

**Примечание** – Последовательность аминокислот имеет значение, которое может быть выражено словами, буквенно-цифровым кодом или другим способом.

**4.1 измерение (величин):** процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине.

**Примечания** – 1 Измерение подразумевает сравнение явления или явления-объекта. 2 Измерение предусматривает описание величины в соответствии с предположением использования результата измерения, методикой измерений и средствами измерений, функционирование в соответствии с регламентированной методикой измерений и с учетом условий измерений.

**4.3 объект измерения:** материальный объект или явление, которые характеризуются одной или несколькими измеряемыми и влияющими величинами.

**4.4 принцип измерений:** явление материального мира, положенное в основу измерения.

**Примеры** – 1 Применение эффекта Дюффрона для измерения электрического напряжения. 2 Применение эффекта Пельтье для измерения поглощенной энергии концентрирующего излучения. 3 Применение эффекта Доплера для измерения скорости. 4 Использование гравитационного притяжения при измерениях массы космических тел. 5 Энергия фотосинтеза, которая служит для измерения молярной концентрации.

**Принцип измерений** – математическая модель физического явления, положенная в основу действия средства измерений, или совокупности таких моделей.

**Примеры** – 1 Определение электрического напряжения  $U$  по формуле для эффекта Дюффрона  $h\Delta\Omega = 2eU$ , где  $h$  – постоянная Планка,  $\Omega$  – частота СВЧ-излучения,  $e$  – заряд электрона. 2 Определение поглощенной энергии концентрирующего излучения по формуле для эффекта Пельтье  $Q = \Pi_2 I$ , где  $Q$  – мощность тепловыделения,  $\Pi_2$  – коэффициент Пельтье контактирующих материалов,  $I$  – плотность тока. 3 Определение скорости  $v$  по формуле для эффекта Доплера  $\omega = \omega_0(1 - v/c)(1 - v_0/c) \cos \theta$ , где  $\omega$  – измеряемая наблюдаемая частота колебаний,  $\omega_0$  – частота колебаний источника,  $v$  – скорость распространения колебаний в линейной среде без дисперсии,  $\theta$  – угол между вектором скорости и волновым вектором волны. Релятивистская формула:  $\omega = \omega_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}(1 - v_0/c) \cos \theta$ , где  $c$  – скорость света. 4 Определение массы взвешиванием по формуле силы гравитационного притяжения  $F = mg$ , где  $m$  – гравитационная масса,  $g$  – ускорение свободного падения, правую рычага  $F_1 l_1 = F_2 l_2$ , где  $l$  – плечо силы, или по формуле для упругой силы  $F = -k\Delta l$ , где  $k$  – коэффициент упругости,  $\Delta l$  – изменение длины упругого тела.

**Принцип действия многих средств измерений основан на математической модели физического явления. В этих примерах формулы предельно преобразовывают в уравнение метода косвенного измерения (п.5.2 п.50.2.004–2000 [3], 3.2.8 МИ 2916–2005 [4]), тогда Примечание 2 к п.4.19 РМГ 79–2013 «Прямое измерение» [2] приобретает более широкий смысл. Поэтому «большинство измерений в метрологии относится к косвенным» не только потому, что «подразумевает учет различных факторов, влияющих на поправки и т.д.», а еще и по принципу действия средств измерений.**

**4.5 метод измерений:** прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей или соотношения со шкалой в соответствии с реализованным принципом измерений.

**4.6 метод сравнения (с мерой):** метод измерений, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой.

**Пример** – Измерение массы на рычажных весах с использованием гирь.

4.7 нулевой метод (измерений): Метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на средство сравнения доводит до нуля.

Пример - Измерение электрического сопротивления мостом с полным его уравновешиванием.

4.8 метод измерений замещения: метод замещения: Метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают мерой с известным значением величины.

Пример - Взвешивание с поочередным помещением измеряемой массы и гири на одну и ту же чашку весов (Метод Бюрда).

4.9 метод измерений дополнения: метод дополнения: Метод сравнения с мерой, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

4.10 дифференциальный метод измерений: Метод измерений, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, при котором измеряется разность между этими двумя величинами.

Пример - Измерения, выполняемые при поверке мер длины сравнением с эталонной мерой на компараторе.

4.12 референтная методика измерений: Методика измерений, принятая для получения результатов измерений, которые могут быть использованы для оценки правильности измеренных значений величин, полученных по другим методикам измерений величин того же рода, а также для калибровки или для определения характеристик стандартных образцов.

Примечание - Методику измерений необходимо отличать от методики калибровки.

4.13 первичная референтная методика измерений: Референтная методика измерений, которая используется для получения результата измерения без сравнения с эталонной единицей величины того же рода.

Примечание - Консультативный комитет по количеству вещества - Метрология в химии (CCQM) использует для этого понятия термин *первичный метод измерений*.

6.11 мера (материальная): средство измерения, которое воспроизводит в процессе использования или постоянно хранит величины одного или более родов, с приписанными им значениями.

Пример - Эталонная гиря, мера вместимости (которая сохраняет одно или несколько значений величины, со шкалой значений величины или без нее), эталонный резистор, линейная шкала (линейка), концевая мера длины, эталонный генератор сигналов, меры твердости (минералы различной твердости по шкале Мооса), аттестованный стандартный образец.

5.14 Наблюдение при измерении - операция, проводимые при измерении и имеющие целью своевременно и правильно произвести отчет [2a].

Примечание - Не следует заменять термин *измерение* термином *наблюдение*.

Измерение количественного проявления свойства физического объекта - совокупность операций сравнения свойства объекта со шкалой одноименной меры и присвоением измеряемому количественному проявлению свойства номинального значения этой меры.

Средство измерений - носитель шкалы физической величины, предназначенный для измерений и имеющий нормированные метрологические характеристики.

6.2 Средство измерений - техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и/или хранящее единицу физической величины, размер которой принимают неизменным в пределах установленной погрешности в течение известного интервала времени [2a].

6.2 средство измерений: Техническое средство, предназначенное для измерений и имеющее нормированные (установленные) метрологические характеристики. [2]

Примечание - За основу взято определение из РМГ 29-99, которое отличается от определения, приведенного в ВМЗ-3.

6.22 Средство измерений узаконенное - средство измерений, признанное годным и допущенное для применения уполномоченным на то органом [2a].

Метод измерения - способ сравнения свойства объекта со шкалой физической величины или ее носителем на основе принципа измерения - нулевой, замещения и т.п. Измерительный сигнал - физическое воздействие на средство измерений, которому приписана модель физической величины в виде неопределенной величины или функции с неопределенными параметрами, подлежащими определению.

Результат измерения - вероятностная оценка возможных значений измеряемой величины (количественного проявления измеряемого свойства), полученная методом доверительного оценивания.

Сокращенная форма: *вероятное значение, погрешностные границы, доверительная вероятность*.

5.1 результат (измерения величины): множество значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией [2].

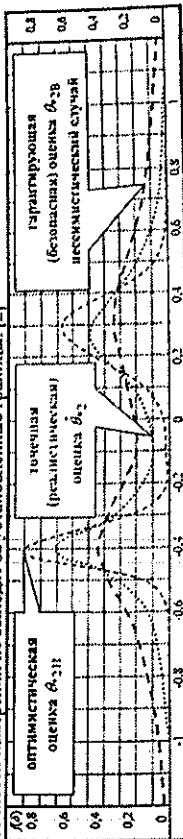
Примечания - 1 Определенное понятие результата измерения претерпело существенное изменение по сравнению с определением РМГ 29-99 и введено в себя выражение точности измерения. Информация, приводимая в результате измерения, определяется особенностями конкретного измерения и соответствует требованиям, предъявляемым к этому измерению. В большинстве случаев информация относится к точности измерения и выражается *показателями точности*, в обоснованных случаях содержит указание методики измерения и др. 2 Результат измерения может быть представлен измеренным значением величины с указанием соответствующего показателя точности. К показателям точности относятся, например, среднее квадратическое отклонение, доверительные границы погрешности, стандартная неопределенность измерения, суммарная стандартная и расширенная неопределенности. ВМЗ предусматривает также представление результата измерений плотностью распределения вероятностей на множестве возможных значений измеряемой величины.

5.2 измеренное значение (величины): Значение величины, которое представляет результат измерения.

Примечания - 1 Для измерения, в котором имеют место повторные показания, *измеренное значение* может использоваться, чтобы получить соответствующее *измеренное значение* измерения. Таким совокупным отклонением значений величины может быть использована для вычисления результирующего измеренного значения измерения, такого как среднее арифметическое или медиана, обычно с меньшей соответствующей неопределенностью (погрешностью) измерения. 2 Когда диапазон истинных значений величины, представляющей измеряемую величину, мал по сравнению с неопределенностью (погрешностью) измерения, измеренное значение может рассматриваться как оценка, по сути дела, единственного истинного значения величины, и оно часто представляет собой среднее арифметическое или медиану отдельных измеренных значений, которые получены при повторных измерениях. 3 В случае, когда диапазон истинных значений величины, представляющей измеряемую величину, велика считать среднее по сравнению с неопределенностью (погрешностью) измерения, измеренное значение часто будет оценкой среднего арифметического или медианы набора истинных значений величины. 4 В GUM [3] для понятия измеренное значение величины используют термины *результат измерения* и *оценка значения измеряемой величины* или просто *оценка измеряемой величины*. См. также 5.1, примечание 1.

13.1 Единство измерений - состояние измерений, характеризующееся тем, что их результаты выражаются в узаконенных единицах физических величин, размеры которых в установленных пределах равны размерам единиц, воспроизводимых первичными эталонами, а погрешности результатов измерений известны и с заданной вероятностью не выходят за установленные пределы. [2a]

9.1 единство измерений: ЕИ: состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах величин или в значениях по установленным шкалам измерений, а показатели точности измерений не выходят за установленные границы. [2]



Мы перестали понимать, что такое измерение

В.А. Кузнецов

| ГОСТ 16263-70                                                                                         |                                                                                                       | РМГ 29-99                                                                                             | РМГ 29-2013                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.1. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.1. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.1. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.1. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.2. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.2. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.2. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.2. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.3. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.3. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.3. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.3. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.4. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.4. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.4. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.4. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.5. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.5. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.5. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.5. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.6. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.6. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.6. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.6. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.7. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.7. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.7. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.7. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.8. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.8. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.8. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.8. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.9. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.9. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.9. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  | 4.9. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном.  |
| 4.10. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.10. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.10. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.10. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.11. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.11. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.11. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.11. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.12. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.12. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.12. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.12. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.13. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.13. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.13. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.13. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.14. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.14. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.14. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.14. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.15. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.15. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.15. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.15. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.16. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.16. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.16. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.16. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.17. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.17. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.17. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.17. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.18. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.18. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.18. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.18. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.19. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.19. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.19. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.19. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |
| 4.20. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.20. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.20. Измерение — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. | 4.20. Измерение (величины) — процесс установления количественного отношения между объектом измерения и эталоном. |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.4. Совокупные измерения — Проз-4.21 совокупные измерения: проводимые одновременно водимые одновременно измерения не-но измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяются путем решения системы уравнений, получающихся при измерении этих величин в различных сочетаниях. Примечания — 1. Для определения значений искомых величин число уравнений должно быть не меньше числа величин. 2. Как правило, в модели совокупных измерений несколько входных величин. 4.22 совместные измерения: проводимые одновременно измерения двух или нескольких неод-именных величин для определения зависимости между ними. Примечание — Как правило, модель совместных измерений описывает параметрическую зависимость между измеряемыми величинами и алгоритм оценки параметров данной зависимости на основе результатов измерений. 4.23 измерительная задача: задача, заключающаяся в определении значения физической вели-чины путем ее измерения с требуемой точностью в данных условиях измерений. | 4.21 совокупные измерения: проводимые одновременно водимые одновременно измерения не-но измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяются путем решения системы уравнений, получающихся при измерении этих величин в различных сочетаниях. Примечания — 1. Для определения значений искомых величин число уравнений должно быть не меньше числа величин. 2. Как правило, в модели совокупных измерений несколько входных величин. 4.22 совместные измерения: проводимые одновременно измерения двух или нескольких неод-именных величин для определения зависимости между ними. Примечание — Как правило, модель совместных измерений описывает параметрическую зависимость между измеряемыми величинами и алгоритм оценки параметров данной зависимости на основе результатов измерений. 4.23 измерительная задача: задача, заключающаяся в определении значения физической вели-чины путем ее измерения с требуемой точностью в данных условиях измерений. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Измерительная задача должна быть задачей, а не измерением.

### Основания теории измерительных задач

1768 г. Принцип Ньютона-Эйлера: Физический размер меры единицы измерения с её номиналь-ным значением не связан, размеры мер кратных и дольных единиц устанавливаются калибровкой. Утверждение о неизвестности истинного значения смысла не имеет.

1792 г. П.С. Лаплас применил метод наименьших квадратов.

1794 г. К.Ф. Гаусс применил метод наименьших квадратов.

1853 г. П.Л. Чебышёв создал теорию наилучшего приближения непрерывной на множестве  $M$  функции  $F(x)$  функциями  $S(x)$  на заданном классе функций в метрике  $\rho(F, S) = \sup_{x \in M} |F(x) - S(x)|$ .

1914 г. А.С. Эддингтон указал на предпочтительность САО перед СКО как оценок рассеяния.

1920 г. Р.А. Фишер вступил в дискуссию о преимуществах САО и СКО в пользу САО.

1925 г. Следствие теоремы П.П. Леви единственности для характеристических функций:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt, \text{ где } \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

— характеристическая функция распределения вероятностей, непрерывной в точках  $x \in M$ .

1933 г. Расстояние Колмогорова между статистической функцией распределения и гипотетиче-ской функцией распределения вероятностей:  $D = \sup_{x \in M} |F_N(x) - F(x)|$ .

1942-1944 гг. Формула Уилкса-Роббинса для доли  $\gamma$  непрерывного распределения, сосредото-ченного с вероятностью  $\beta$  между крайними членами вариационного ряда из  $N$  членов:

$$\beta = P(\xi_{(1)} \leq \xi_{(N)} \leq \xi_{(N-1)}) = 1 - N \cdot \gamma^{N-1} + (N-1) \cdot \gamma^N, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Для  $P = \gamma = \{0.90; 0.95; 0.99\}$  объемы выборок согласно ГОСТ Р ИСО 16269-8-2005 составляют для простого непрерывного распределения  $N = \{38, 93, 662\}$ , а для симметричного распределения —  $N_p = \{11, 29, 228\}$ .

1949 г. Схема Jack knife М. Кенуа: из статистического ряда поочередно удаляются члены, а по оставшим членам строится цензурированная оценка параметра положения. Эта оценка усредня-лась для оценивания смещения оценки по полному ряду. Та же идея в методе Cross validation М. Стоуна, информационном критерии Х. Акаике и методе Generalized cross validation Г. Уэбба.

1960 г. Д-р Тьюкин разрешил проблему САО/СКО схемой «загрязнения».

1966 г. Монография Ю.В. Линника «Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений» — прообраз теории измерительных задач, но без потребности в недостаточности.

1968 г. А.Г. Ивахненко: выборку данных делит пополам, поочередно используя каждую из частей в качестве пробной или контрольной. Минимум дисперсии экстраполяции регрессионной модели на контрольные части служит критерием выбора структуры. Интерполяционный метод В.И. Чернецкого — прообраз названия интерполяционной концепции.

1971 г. Расстояние Феллера или расстояние по вариации:

$$\rho(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx$$

1979 г. Метод «Boot star» Б. Эфрона: обобщение схемы Jack knife на выбор удаляемых членов.

1980 г. Интерполяционная концепция метрологии в теории измерительных задач.

1. Метрология — это наука о способах установления количественного соответствия между физическими объектами и их математическими моделями путем решений измерительных задач.

2. Количественное проявление свойств физических объектов характеризуют физические величины как первичных, а причинно-следственные связи свойств — структура и параметры математических моделей.

3. Математическая модель – это: а) множество на числовой оси, интервал возможных значений переменных величин; б) функция, на числовое множество как собственную функцию – выходную функцию – входных переменных, из числового множества функций на числовое множество; г) оператор; в) функционал как отображение множества функций на множество функций. На всех этих множествах оператор как отображение множества функций на множество функций.

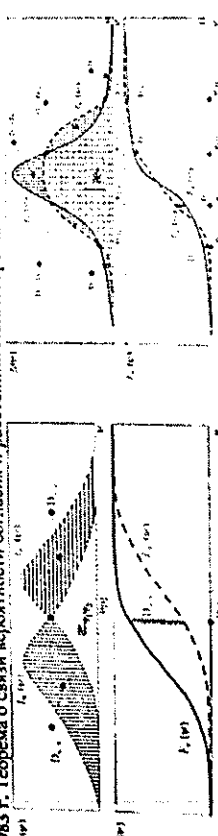
4. Измерение количественного проявления свойства – это выбор эквивалентной меры односторонней физической величины из множества мер шкалы. Результат измерения получают путем сопоставления измеряемому свойству характеристик эквивалентной меры и потребности сравнения.

5. Шкала измерений физической величины — это множество мер одноименного рода, для которого с определенной полнотой выполняются аксиомы множества действительных чисел: единичного с определенной полнотой множества 0; существования 0; существования (аддитивности); сложения (аддитивности); порядка; сложения (мультипликативности); существования 1; непрерывности.

В соответствии с указанным актом различают шкалы порядка, разностей и отношений. В зависимости от полноты выполнения шкалы реализуются на основе первичных измерений, а также аддитивные и неаддитивные. Шкалы измерений реализуются на основе первичных измерений, а также аддитивные и неаддитивные. Шкалы измерений реализуются на основе первичных измерений, а также аддитивные и неаддитивные.

6. Критерий размерности, параметрической, структурно-параметрической и полной идентификации математических моделей физических объектов – максимум вероятности согласия с данными совместных измерений или минимум погрешности неадекватности в схеме перекрестного обобщения в пространстве переменных.

3.3.2 – Тезисы о связи достоверности согласия и расстояния Колмогорова:



Согласно теореме Колмогорова  $D$ .

$$\pi_{\psi_1\psi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \{g_{\psi_1}(w), f_{\psi_2}(w)\} d\psi = 1 - \frac{1}{2} \int \int |f(z) - f_0(x)| dz = 1 - \sum_{m=1}^M (-1)^m - |f(\xi_m) - f_0(\xi_m)|$$

На связь  $\alpha$ -критерия и расстояние по вариации в 1989 году обратила внимание редакция журнала «Теория вероятностей и её приложения», ее отрыв прокомментировал И.Г. Журбенко, а А.Х. Шенг исследовал статистический  $\alpha$ -критерий.

«Согласно как в рассуждениях, так и в выводах, мы имеем дело с понятием, которое не имеет никакого отношения к понятию «сущности» и «существования».

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\theta) &= M(\tilde{\varepsilon} - \theta) + 2 \int_{\theta}^{\infty} F_{\varepsilon}(\varepsilon) d\varepsilon \\ &\rightarrow \frac{\lambda(\theta)}{\theta} = -1 + 2F_{\varepsilon}(\theta), \quad \frac{\tilde{d}^2(\theta)}{\theta^2} = 2F_{\varepsilon}'(\theta) \geq 0 \rightarrow F_{\varepsilon}'(\theta_{\min}) \approx 1/2 \rightarrow \arg \min_{\theta} |\tilde{\varepsilon} - \theta| = \theta_{\min}. \end{aligned}$$

Согласно [Бисел 11, Доксан К. Математическая статистика. М.: Финансы и статистика, 1983, с. 64] для распределения Гаусса с параметрами  $m$  и  $\sigma$  имеет место соотношение  $M[\hat{\theta} - \theta] = \sigma \cdot Q(\theta - m/\sigma)$ , где  $Q(x) = 2 \int_0^x (1 - t^2)^{-1/2} dt$ , а в общем случае согласно [Писенко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1985, с. 195.]

$$M[\Xi - \vartheta] = \begin{cases} M[\Xi - \xi_{0.5}] + 2 \int_{\xi_{0.5}}^0 (0 - x) dF(x), & \vartheta > \xi_{0.5} \\ M[\Xi - \xi_{0.5}] + 2 \int_0^{\xi_{0.5}} (x - 0) dF(x), & \vartheta < \xi_{0.5} \end{cases}$$

1984 г. Схема перекрестного наблюдения погрешности неадекватности для модели объекта измерений: влияние наших совместно измерений ведет по числу  $M$  параметров модели  $Y(X)$  на

21

(M+1) блока, каждый из которых по-прежнему является контрольным, а оставшиеся — поочередно образуют пробную часть. На пробных частях строят модели данной структуры и от их экстраполяций на контрольные блоки отсчитывают случайную составляющую потребности нецелесообразности.

$$\hat{\xi}_\theta(\hat{X}) = \hat{Y}_p(\hat{X}) - \sum_{m=1}^{M+1} \Phi_\theta(\Pi_{\theta_m} \hat{X}) \cdot \Pi(\kappa X_{m+1}; X)$$

где  $P(X_m; X)$  – индикаторная функция  $m$ -го контрольного блока,  $\Phi_m(\Theta_m; X)$  – характеристика положения пробной модели,  $\Theta_m$  – множество параметров модели на пробной части выборки. Структурно-параметрическую идентификацию осуществляют перебором вариантов структур модели максимальной сложности, методов определения параметров и сегментации данных с проверкой гипотез вырожденности  $H_0$  непарварности  $H_{00}$  и композиционной однородности  $H_{000}$ . Гипотеза  $H_0 = \{\theta_0, a, a \neq 0; \theta_{1,j}, j = 0 \dots I, j \neq 0, \dots, 0\}$  соответствует  $Y = \text{const}$ . Альтернативными являются гипотезы до ненулевых значений хотя бы одного параметра  $\theta_{1,j}, j = 1, \dots, k \neq 0, \dots, 0$ . Гипотез  $H_{00}$  альтернативными являются гипотезы до осочно-непрерывной характеристике полонения с точками структурно-параметрических изменений. Гипотезе  $H_{000}$  альтернативными являются гипотезы до деления реализаций статистического ансамбля данных совместных измерений на подмножества с различными моделями характеристистики положения.

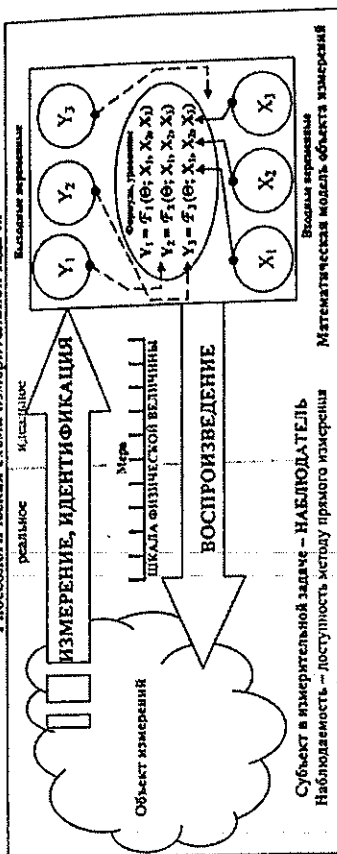
2004 г. Контурная оценка погрешности недостаточности для функции распределения вероятностей  $F_*(x)$  на основе статистик Смирнова  $D_N^* = \sup_{1 \leq i \leq N} [F_{(N)}(x) - F_*(x)]$  и  $D_N^- = \inf_{1 \leq i \leq N} [F_{(N)}(x) - F_*(x)]$ :

$$f_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi = \frac{F(x-a) - F(x-b)}{b-a}, \text{ где } \max(F(x-a) - F(x)) = D_1^+ \text{ и } \min(F(x-b) - F(x)) = D_2^-.$$

## ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

МІСЦЕВІСТЬ ІНТЕРВ'Ю

Ихетев йонь ялшань акакс вькзачи оловокс. Л



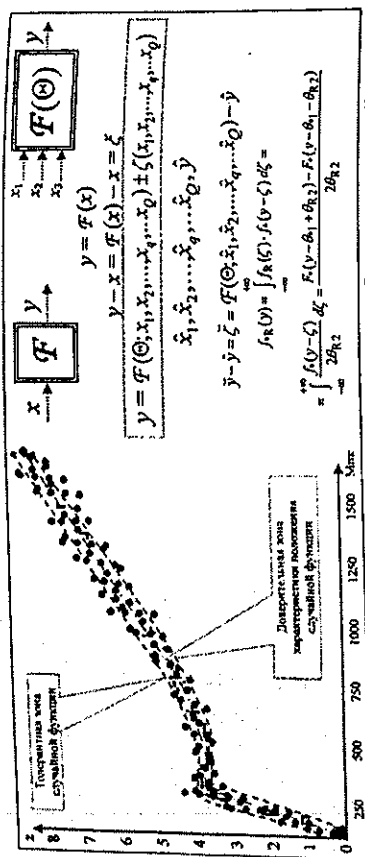
Математическая модель объекта измерений: математическое выражение причинно-следственной связи между физическими и расчетными величинами, характеризующими свойства объекта измерений:  $y = f(\Theta, x_1, x_2, \dots, x_p) \pm \zeta(x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_q)$ .

Погрешности неадекватности математической модели: расчетная величина, разность расчетного значения переменной модели объекта и результата ее измерения в соответствующих расчету условиях [3]:  $\bar{\zeta} = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}) - y$

Стохастическая компактность – статистическая однородность данных измерений относительно характеристики положения интерпретирующей модели, модели объекта измерений.

Композиционная однородность — стохастическая компактность данных об одной и той же величине, полученных из разных источников.

33



Характеристики математической модели объекта измерений:

а) входные  $X = \{X_i; q = 1, \dots, K\}$  и выходные  $Y = \{Y; k = 1, \dots, K\}$  переменные;  
 б) параметры  $\Theta = \{\theta_m; m = 1, \dots, M\}$ , в т.ч. физические параметры – параметризованные физические величины, т.е. полагаемые в задаче постоянными;

в) математическая структура зависимости между физическими и расчетными величинами (характеристика положения)  $\bar{Y}(X) = F(\Theta; X_1, \dots, X_n, \dots, X_0) = F(\Theta; X)$ , где  $v = v_0, v_1, \dots, v_M$  – двоичный код структуры из индикаторных функций параметров;

$$\bar{Y}_{1,1}(x) = \theta_0 + \sum_{i=1}^M \theta_i x^i \rightarrow \bar{Y}_0(x) = v_0 \theta_0 + v_1 \theta_1 x + v_2 \theta_2 x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} \bar{Y}_{00}(x) = \theta_0 + \theta_1 x^2$$

г) функция погрешности неадекватности (характеристики рассеяния) – распределение погрешности неадекватности, для которого вид и параметры являются функциями опорных значений входных переменных.

Измерительная задача – задача установления количественного соответствия между свойствами физического объекта и характеристиками его математической модели в данных условиях с требуемой точностью путем измерений и вычислений [3].

Постановка измерительной задачи должна содержать указание:

- 1) характеристик модели объекта измерений с диапазоном изменения переменных;
- 2) условий измерений в виде перечней а) доступных изменений и измерению переменных моделей объекта, б) допустимых значений влияющих величин, в) метрологических характеристик необходимых средств измерений;
- 3) цели задачи в терминах характеристик модели объекта;
- 4) формы представления результата и требований к его точности в виде доверительных границ погрешности и соответствующей доверительной вероятности [3].

Измерительные задачи классифицируют по следующим признакам:  
 1) по направленности отображения между объектом и моделью – на задачи идентификации модели и задачи воспроизведения заданных моделей (функциональные), статистические задачи (вероятностные) и динамические задачи (операторные модели);  
 2) по типам моделей объектов – на статистические задачи (вероятностные модели);  
 3) по целям – на структурно-параметрические задачи (по структуре, параметрам и составу переменных) и размерностные задачи (по родам физических величин);  
 4) по статусу применяемых средств измерений – метрологические задачи (с применением эталонов) и прикладные задачи (без эталонов).

Цель размерностной идентификации – определение значений физических величин, переменных математических моделей объектов измерений. Виды измерений делят по родам физических величин и группируют по областям измерений:

- 1) измерения геометрических величин;
- 2) измерения механических величин;
- 3) измерения параметров потока, расхода, уровня и объема веществ;
- 4) измерения давления, вакуумные измерения;
- 5) измерения физико-химического состава и свойств веществ;
- 6) теплофизические и температурные измерения;
- 7) измерения времени и частоты;
- 8) измерения электрических и магнитных величин;
- 9) радиотехнические и радиоэлектронные измерения;
- 10) измерения акустических величин;
- 11) оптико-физические измерения;
- 12) измерения параметров ионизирующих излучений и ядерных констант.

Цель структурно-параметрической идентификации – определение структуры, параметров и состава переменных моделей объектов:

а) при параметрической идентификации – структура модели и состав переменных заданы однозначно;

б) при структурно-параметрической идентификации – структура модели и состав переменных заданы набором вариантов или моделью максимальной сложности;

в) при полной идентификации – структура и состав переменных модели не заданы.

Методы решения измерительных задач

Метод решения измерительной задачи – совокупность методов воспроизведения физических величин, измерений и вычислений для получения искомого результата [3]. Арифметическое решение задачи – числовое, алгебраическое решение – символическое.

Методы размерностной идентификации: метод прямого измерения, метод косвенного измерения, метод совокупных измерений.

Методы структурно-параметрической идентификации: метод многократных измерений, метод совместных измерений.

Метод прямого измерения – Метод решения измерительной задачи одним из методов измерений (нулевого, замещения) без использования вычислений и введения поправок по данным вспомогательных измерений.

Метод многократных измерений – Метод решения измерительной задачи на основе многократных измерений одной и той же величины в неизменных условиях путем статистической обработки полученного ряда значений для нахождения характеристик ее вероятностной модели.

Метод косвенного измерения – Метод решения измерительной задачи на основе измерений физических величин, функционально связанных с искомой величиной в известном виде, путем вычисления по уравнению связи.

Метод может применяться в сочетании с методом многократных измерений. Метод совокупных измерений – Метод решения измерительной задачи на основе измерений физических величин, функционально связанных с искомыми величинами в известном виде путем решения системы уравнений связи.

Метод может применяться в сочетании с методами косвенных измерений и многократных измерений. Число уравнений должно быть не менее числа искомых величин. В противном случае для решения применяют методы сглаживания – наименьших квадратов, наименьших модулей и др.



Метод совместных измерений – Метод решения измерительной задачи путем одномоментных измерений всех физических величин, входящих в математическую модель объекта измерений данной структуры при различных сочетаниях их значений в диапазонах изменения, на основе решения системы уравнений связи между ними относительно параметров.

Число уравнений в системе и число измеряемых величин должно быть не менее числа исковых параметров. Метод может применяться в сочетании с методами размерностной идентификации. При избыточном числе уравнений для решения системы применяются методы сглаживания – метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей и др.

Результат решения измерительной задачи – вероятностная оценка возможных значений искомой величины или зависимости между величинами в явном виде с учетом погрешностей измерений и неадекватности.

Результат решения измерительной задачи размерностной идентификации представляет композиция наблюдаемой и ненаблюдаемых составляющих или, в сокращенном виде, толерантный интервал, соответствующий заданной норме достоверности вероятности. Результат решения измерительной задачи структурно-параметрической идентификации представляет многомерная функция погрешности неадекватности в виде композиции наблюдаемой и ненаблюдаемых составляющих или, в сокращенном виде, в виде зоны толерантности, соответствующей заданной норме достоверности вероятности.

Качественные и количественные различия моделей объектов измерений.

Поправка Ньюкомба:

$$F = g \cdot m \rightarrow F = G \cdot Mm/R^2 \rightarrow F = G \cdot Mm/R^2 \cdot (1 + 0.000000162)$$

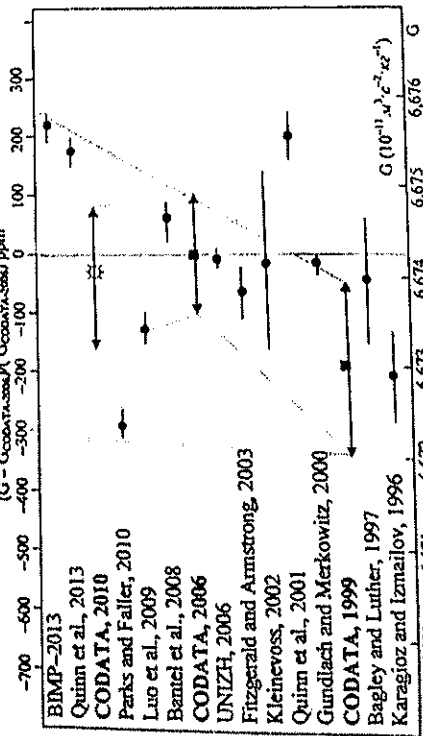
$$IGSN-71: g = 9.780318 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi) - 3.086 \cdot 10^{-6} h + \Delta g_0(\varphi).$$

CODATA (Committee on Data for Science and Technology):

Оценки физических констант – средневзвешенные экспериментальных результатов и их СКО.

Фундаментальная гравитационная постоянная ( $10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$ ; 68% CL):

$$G_{\text{CODATA}} = 6.67259(85); G_{1999} = (6.673 \pm 0.010); G_{\text{CODATA}} = 6.6742(16); G_{\text{CODATA}} = 6.67428(67).$$



## МЕТОД МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Необходимые условия обеспечения статистической однородности данных измерений. Измерения выполняются на одном и том же объекте измерений, в одной и той же точке, одной и той же величины, в одних и тех же условиях, одним и тем же экспериментальным средством измерений, по одной и той же методике, одним и тем же оператором, с одной и той же тщательностью в течение короткого промежутка времени.

## Общий алгоритм

1. Постановка измерительной задачи согласно Р 50.2.004-2000.

2. Обеспечение необходимых условий статистической однородности данных.

При отсутствии достоверной информации или невозможности создания и проверки необходимых условий статистической однородности используют равномерные распределения вероятностей. Параметры равномерного распределения вероятностей, эквивалентного статистическому ряду, используют для определения точек усечения и оформления протокола.

3. Выполнение плана измерений и оформление протокола.

4. Проверка гипотезы об отсутствии тренда в статистическом ряду данных как во временном ряду и его исключение в случае наличия.

Проверка проводится согласно программе «ММК-СТАТ» по гипотезе однородности  $H_0$  (отсутствия зависимости). При необходимости проверки проводят и для характеристики рассеяния.

5. Представление статистического ряда данных измерений в виде статистической функции распределения или в виде смеси распределений вероятностей.

6. Выдвижение гипотезы о виде распределения вероятностей.

7. Оценивание параметров конкурирующих гипотез по критерию минимума среднего модуля отклонений от статистической функции распределения или от функции распределения смеси с выбором вида распределения вероятностей наблюдаемой составляющей измеряемой величины по критерию минимума контурной оценки погрешности неадекватности или по ее допустимому значению.

8. Построение композиции (свертки) наблюдаемой и ненаблюдаемых составляющих распределения возможных значений измеряемой величины.

9. Определение границ толерантного интервала согласно цели задачи.

Данные протокола

| Пример           | № п/п    | 1      | 2      | 3     | 4     | 5                                        |
|------------------|----------|--------|--------|-------|-------|------------------------------------------|
| Данные протокола | Значение | -0.480 | -0.005 | 0.035 | 0.035 | 0.040                                    |
|                  |          |        |        |       |       | Посред. допустимой погрешности измерений |
|                  |          |        |        |       |       | $\theta_{\text{доп}} = 0.0625$           |

## Графическое решение

| r | $\hat{\theta}_r$ | $F_0(\hat{\theta}_r)$ | $F_0^*(\hat{\theta}_r)$ | Параметры эквивалентного равномерного распределения    |
|---|------------------|-----------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1 | -0.48            | 1                     | 0                       | $\hat{\theta}_1 = [0.04; (-0.48)]/2 = -0.22$           |
| 2 | -0.005           | 1                     | 0.2                     |                                                        |
| 3 | 0.035            | 2                     | 0.4                     | $\hat{\theta}_3 = (64) \cdot [0.04; (-0.48)]/2 = 0.39$ |
| 4 | 0.04             | 1                     | 0.8                     |                                                        |

